

Probabilités et statistiques

Benjamin Monmege
benjamin.monmege@lsv.ens-cachan.fr

2 février 2012

Exercice 1. On dispose de 6 tasses et de leurs soucoupes : 2 sont rouges, 2 sont blanches et 2 sont noires. Si les tasses sont placées de manière aléatoire sur les soucoupes, quelle est la probabilité qu'aucune tasse ne soit sur une soucoupe de la même couleur ?

Exercice 2. Une pièce est lancée à plusieurs reprises. Quelle est la probabilité qu'un jour ou l'autre la pièce tombe sur face ?

Exercice 3. Un test médical pour une maladie M a deux valeurs de sortie possibles $+$ et $-$. Les probabilités sont

	D	$\neg D$
$+$	0.009	0.099
$-$	0.001	0.891

1. Calculer les probabilités $\mathbb{P}(+ | D)$ et $\mathbb{P}(- | \neg D)$.
2. Supposons que vous alliez faire un test et obteniez un résultat positif. Selon votre intuition, quelle est l'ordre de grandeur de la probabilité que vous ayez la maladie ? Faites le calcul pour vérifier votre intuition.

Exercice 4. Une famille est composée de deux enfants (qui ne sont pas des jumeaux). Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons, sachant qu'au moins un est un garçon ? Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons, sachant que le plus jeune des deux enfants est un garçon ?

Exercice 5. Devant le peloton d'exécution, on vous propose un jeu avec deux urnes contenant des boules bleues et rouges. Vous pouvez tirer deux boules, sans remise : si au moins une boule rouge est tirée, vous êtes libre. En réalité, voici le contenu des urnes : la première urne contient deux boules bleues et trois boules rouges, alors que la seconde urne contient trois boules bleues et une boule rouge.

Imaginons que vous choisissiez aléatoirement une des deux urnes pour tirer la première boule, et que la balle tirée est bleue !

1. Quelle est la chance que vous ayez choisi une urne par rapport à l'autre ?
2. Si vous conservez la même urne pour le second tirage, quelle est votre chance de survie ?
3. Pour votre deuxième tirage, avez-vous intérêt à tirer dans la même urne ou à en changer ?

Exercice 6. On cherche un estimateur pour la variance d'un ensemble de données x_1, \dots, x_n , indépendantes identiquement distribuées, suivant la loi d'une variable aléatoire X . Pour rappel, l'estimateur $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ est un estimateur sans biais convergent vers l'espérance de X , notée μ .

1. On considère dans un premier temps l'estimateur $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$. Étudier le biais et la convergence de cet estimateur. Cela vous semble-t-il un estimateur raisonnable ?
2. On considère désormais l'estimateur $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$. Calculer le biais de cet estimateur. Corriger l'estimateur pour obtenir un biais nul. Prouver alors la convergence de cet estimateur et donner une borne sur la vitesse de convergence.