Loi Binomiale

Nilo Schwencke

28 novembre 2013

1 Quelques définitions

Définition 1 (Univers d'une expérience aléatoire)**.** On appelle univers d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues de cet expérience. On note cet ensemble (très souvent et en particulier dans cette fiche) Ω.

Définition 2 (Épreuve de Bernouilli)**.** On appelle épreuve de Bernouilli de paramètre $p \in [0;1]$, une expérience aléatoire à deux issues : $\left\{ \begin{array}{ll} succ\grave{e}s & de\, probabilit\acute{e}\, p \\ \acute{e}chec & de\, probabilit\acute{e}\, 1-p \end{array} \right.$.

Remarque. Une épreuve de Bernouilli s'adapte particulièrement bien au cas où l'on a $\Omega = \{0,1\}$.

2 Loi binomiale et grandeurs statistiques associées

Théorème (Loi binomiale)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0;n]\!]$. Alors la probabilité $p(k)$ d'obtenir k en sommant le résultat de n épreuves de Bernouilli (en considérant que $\Omega = \{0,1\}$) est :* $p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Démonstration. Tout d'abord, notons que la somme de n épreuves de Bernouili ne vaut k que si k épreuves réussissent (c'est à dire valent 1) et $n-k$ épreuves échouent (c'est à dire valent 0). On en déduit que chaque expérience (c'est à dire la répétition de n épreuves de Bernouilli) donnant k pour résultat a une probabilité de $p^k(1-p)^{n-k}$. Reste à compter (ou plutôt dénombrer) le nombre $n_e \in \mathbb{N}$ d'expériences donnant k pour obtenir $p(k)$, puisqu'en effet on a $p(k) = n_e p^k (1-p)^{n-k}$.
Dénombrons tout d'abord le nombre d'expériences donnant k en tenant compte de l'ordre dans lequel on considère les épreuves de Bernouilli (en d'autres termes nous considérons qu'une expérience où l'on considère en premier lieu que la première épreuve de Bernouilli donne 1 puis en seconde lieu que la seconde épreuve de Bernouilli donne 1 n'est pas la même expérience que si l'on considère d'abord que la seconde épreuve donne 1 puis ensuite que la première épreuve donne 1).
Si l'on n'a le résultat d'encore aucune épreuve, alors on a n possibilités d'épreuves donnant 1. Une fois cette épreuve "fixée" (ou choisi), il nous reste alors $n-1$ possibilités d'épreuves donnant 1 et donc de façon récursive lorsqu'on a fixé $m \in [\![0;n]\!]$ épreuves, on a $n-m$ possibilités d'épreuves donnant 1.
En particulier, lorsqu'on a fixé $k-1$ épreuves, on a $n-k+1$ possibilités d'épreuves donnant 1.
Il vient donc que l'on a $\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{n!}{(n-k)!}$ possibilités d'éxperiences (ordonnées!!) donnant k comme résultat.

Afin de terminer de dénombrer le nombre d'expériences donnant k, il faut maintenant se demander combien il existe de façons différentes d'ordonner une expérience.
Pour cela considérons une expérience (c'est à dire un ensemble de k épreuves de Bernouilli donnant 1). Pour ordonner ces épreuves, on a donc k choix pour choisir notre première, puis $k-1$ choix pour notre seconde et donc récursivement, on a pour $m \in [\![1;k]\!]$, $k-m+1$ choix pour choisir notre $m^{ème}$ épreuve. Il vient donc que l'on a $k!$ façons d'ordonner une expérience.
On en déduit que le nombre d'expériences donnant k (non ordonnées donc cette fois-ci) est $n_e = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$, ce qui achève la preuve. □

Proposition (Espérance, variance, écart type)**.** *Soit E_x^n une expérience obéissant à la loi binomiale, c'est à dire consistant en $n \in \mathbb{N}$ épreuves de Bernouilli de probabilité $p \in [0;1]$. Alors :*
- *L'Espérance $E_n(X)$ de E_x^n est np*
- *La Variance $V_n(X)$ de E_x^n est $np(1-p)$*
- *L'Écart type $\sigma_n(X)$ de E_x^n est $\sqrt{np(1-p)}$*

Démonstration.
- Espérance :
  Nous raisonnerons par récurrence sur n (avec pour hypothèse de récurrence $E_n(X) = np$, où $E_n(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0;n]\!]$).

  Notons tout d'abord que par définition de l'espérance, on a :
$$E_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k$$
  Initialisation : $E_{n=0}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = 0 = np$
  Hérédité :
  D'après la formule du triangle de pascal, on a : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, d'òu :
$$\begin{aligned}
E_{n+1}(X) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) p^k (1-p)^{n+1-k} k \\
&= \binom{n}{n+1} (n+1) p^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n+1-k} k + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n+1-k} k \\
&= 0 + (1-p)np + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} p^k (1-p)^{n+1-k} k \\
&= (1-p)np + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-k} (k+1) \\
&= (1-p)np + p \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right) \\
&= (1-p)np + p(np + (p+1-p)^n) \\
&= (1-p+p)np + p \\
&= (n+1)p
\end{aligned}$$
  On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n(X) = np$

- Variance :
  Nous raisonnerons par récurrence sur n (avec pour hypothèse de récurrence $V_n(X) = np(1-p)$, où $V_n(X)$ est l'espérance de la variable aléatoire X à valeurs dans $[\![0;n]\!]$).

  Notons tout d'abord que par la formule de König, on a :

$$V_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k^2 \; - \; E_n(X)^2$$

  Initialisation : $V_{n=0}(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k^2 \; - \; E_n(X)^2 = 0 = np(1-p)$
  Hérédité :

$$\begin{aligned}
V_{n+1}(X) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k(1-p)^{n+1-k}k^2 \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right) p^k(1-p)^{n+1-k}k^2 \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= \binom{n}{n+1}(n+1)^2p^{n+1} + (1-p)\left(E_n(X)^2 - E_n(X)^2 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}k^2\right) \\
&+ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k-1} p^k(1-p)^{n+1-k}k^2 \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p)((1-p)np + E_n(X)^2) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} p^k(1-p)^{n+1-k}k^2 \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p)((1-p)np + E_n(X)^2) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{k+1}(1-p)^{n-k}(k+1)^2 \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p)((1-p)np + E_n(X)^2) + p\left(E_n(X)^2 - E_n(X)^2 + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}(k^2+2k+1)\right) \\
&- \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p)((1-p)np + E_n(X)^2) + p\big((1-p)np + E_n(X)^2 + 2E_n(X) + 1\big) \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p+p)((1-p)np + E_n(X)^2) + p(2np+1) \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p)np + n^2p^2 + 2p^2n + p \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (1-p)(n+1)p - (1-p)p + p + p^2n^2 + 2p^2n \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (n+1)p(1-p) + p^2(n^2+2n+1), - E_{n+1}(X)^2 \\
&= (n+1)p(1-p) - p^2(n+1)^2 \; - \; E_{n+1}(X)^2 \\
&= (n+1)p(1-p)
\end{aligned}$$

  On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n(X) = np(1-p)$

- Écart type :
  Par définiton de l'écart type : $\sigma_n(X) = \sqrt{V_n(X)}$, d'où le résultat.

$\square$